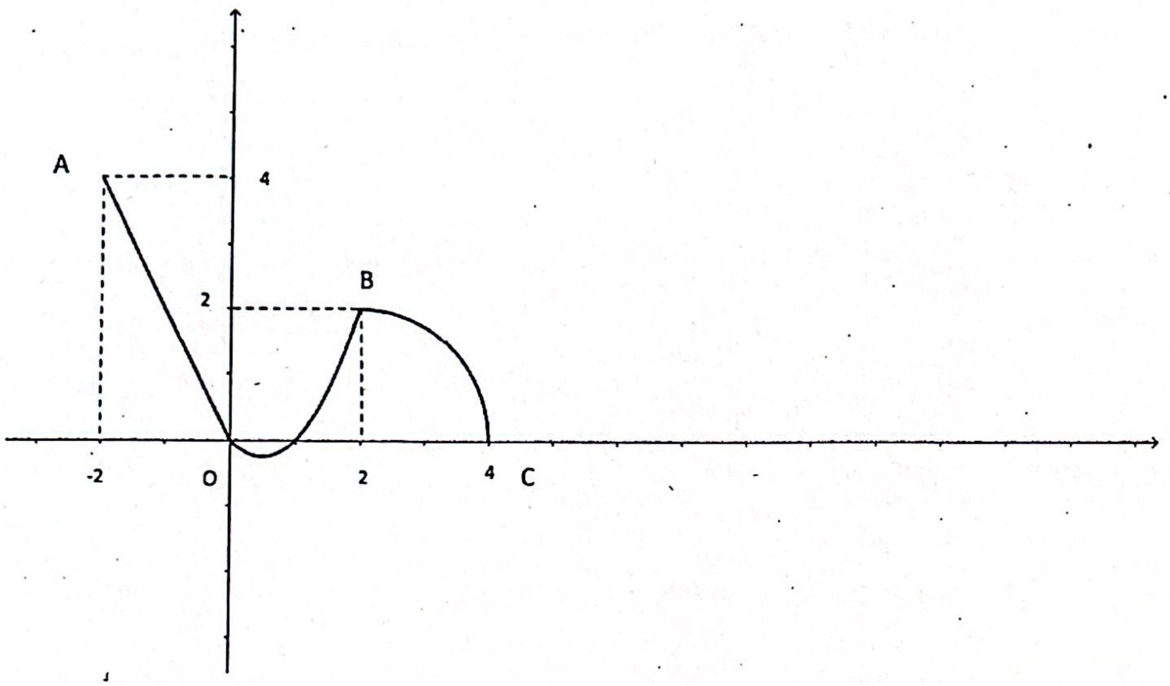
**Nome e cognome** ........................................................................................ **Classe** ................. **Data** ...............

**Svolgere UN problema e QUATTRO quesiti a scelta.**
**Illustrare il procedimento seguito, giustificare i passaggi e motivare le risposte.**

**PROBLEMA 1**
Considerare la funzione $f(x)$, definita nell'intervallo $[-2;4]$, il cui grafico è rappresentato in figura:




Si sa che:
- $f(-2) = 4$
- AO è un segmento di retta
- OB è un arco di parabola tangente nel punto B (2;2) alla retta di equazione $y = 3x - 4$
- BC è un arco di circonferenza di raggio 2 e passante per C(4;0).

a) Studiare la derivabilità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione e classificare gli eventuali punti di non derivabilità. Tracciare il grafico della sua derivata $f'(x)$ nel suo insieme di definizione.

b) Tracciare il grafico orientativo della funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ , spiegando il ragionamento seguito. Spiegare inoltre perché tale grafico deve presentare un punto di massimo relativo e un punto di minimo relativo.

c) Calcolare l'area della regione piana finita del IV quadrante, delimitata dall'arco OB e dall'asse delle ascisse.

d) Calcolare il valor medio di $f(x)$ relativamente all'intervallo [1;4] e relativamente all'intervallo $[0; 4]$ .

**PROBLEMA 2**: Considerare la funzione $f_k(x) = \frac{1}{3}x^3 + (k-1)x^2 + x$.

a) Determinare i valori di $k$ per i quali il grafico $\gamma_k$ della funzione ha punti stazionari e quelli per cui non li ha, specificandone la natura.

b) Verificare che tutte le funzioni $f_k(x)$ passano per l'origine O del riferimento Oxy e stabilire se in tale punto i loro grafici $\gamma_k$ risultano tangenti o secanti.

c) Determinare il valore di $k$ per cui la funzione ha, nel punto di ascissa uguale a -1, la tangente parallela alla retta $r: 2x + y = 0$. Dopo aver verificato che risulta k = 3 studiare l'andamento della funzione $f_3(x)$ e tracciarne il grafico. Calcolare l'area della regione finita di piano racchiusa tra il grafico $\gamma_3$ e la retta r.

d) Detta S la regione piana del primo quadrante compresa tra il grafico $\gamma_3$ e l'asse delle ascisse, nell' intervallo [0; 1], calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione di S attorno all'asse delle ~~ordinate~~. ASCISSE

**QUESITI**

**Quesito 1** Stabilire se la funzione $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & x \leq 0 \\ 2^x & x > 0 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [ -1 ; 1]

**Quesito 2** Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to +\infty} x(e^{\frac{3}{x}} - 1)$

**Quesito 3** Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che l'equazione

$$e^{x+2} + x = 0$$

ammette una e una sola soluzione reale $x_0$.
Determinare un intervallo chiuso $[a; b]$, di ampiezza $b - a = 1$, contenente la soluzione $x_0$.

**Quesito 4** Si lancia un dado a sei facce non truccato per sei volte. Qual è la probabilità di ottenere due volte il numero 6? E di ottenerlo almeno due volte?

**Quesito 5** Risolvere i seguenti integrali indefiniti $\int \frac{x-7}{x^2+x-6}dx$ e $\int x \ln(2x)\, dx$

**Quesito 6** Sapendo che $\int_2^4 f(x)dx = 3$ calcolare $\int_1^2 f(2x)dx$. Spiegare altresì perché, con le informazioni date, non è possibile calcolare $\int_1^2 f(3x)dx$.

**Quesito 7** Determinare i valori di $a$ e $b$ per cui la funzione è continua e derivabile in R.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 2x + a) & ; \; x \geq 0 \\ 2\, e^{bx} & ; \; x < 0 \end{cases}$$

**Quesito 8** L'interno di un serbatoio a forma di parallelepipedo rettangolo, della capacità di 32 L, senza coperchio e con il fondo quadrato, deve essere rivestito di piombo con una lamina. Quali devono essere le dimensioni affinchè la quantità di lamina da utilizzare sia minima? Motivare la risposta.